

# Una aproximación a la curva de transición Clotoide vista desde Mathematica

Luís Blanch, Emilio Checa, Josefa Marín

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

[lblanch@cgf.upv.es](mailto:lblanch@cgf.upv.es), [echeca@mat.upv.es](mailto:echeca@mat.upv.es), [jomarinm@mat.upv.es](mailto:jomarinm@mat.upv.es)

---

## Abstract

*La clotoide, también conocida como radioide de arcos o espiral de Cornu, recibe su nombre del vocablo griego Klothó que significa "hilandera". Su utilización más inmediata está en los trazados en planta de obras lineales como curva de transición (para unir tramos rectos con tramos curvos o para conectar dos tramos circulares de curvaturas distintas). Ésta es su característica más importante, ya que el radio de curvatura disminuye de manera inversamente proporcional a la distancia recorrida sobre ella y esto permite al conductor adaptarse de forma suave al cambio de trayectoria. Los nuevos trazados de carreteras están diseñados incluyendo una sucesión de clotoides con curvatura grande lo que se traduce en mayor distancia de visibilidad y fácil adaptación al terreno.*

*En este trabajo partimos de la propiedad geométrica que define una clotoide y obtenemos su ecuación a partir de las llamadas integrales de Fresnel. En segundo lugar, representamos geoméricamente las propiedades que se derivan y obtenemos una aproximación numérica de la clotoide. Por último, utilizamos esas aproximaciones para presentar un ejemplo.*

*Clothoids, also known as radius of curvature or Cornu spirals, take their name from the greek word Klothó, meaning, weaver. They are also widely used as transition curves in railroad or highway engineering for connecting and transiting the geometry between a tangent and a circular curve (to join straight sections with curve transitions or to connect two circular sections of different curvatures). This is their most relevant characteristic, since the radius of curvature diminishes in inverse proportion to the distance run over it, and that allows the driver to adapt slowly to the change in the trajectory. The new highways are designed including a series of clothoids with a large curvature which involves a greater visibility in the distance and easy adaptation to the track.*

*In this paper we take into account the geometric property which defines clothoids and we obtain its equation from Fresnel integrals. Secondly, we represent the properties derived geometrically and obtain a numerical approximation of the clothoid. Finally, we use these approximations to present an example.*

---

**Keywords:** Clotoide, Ingeniería de carreteras y ferrocarriles, Integrales de Fresnel.

Clothoid, railroad and highway engineering, Fresnel Integrals

El Universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas,  
siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas,  
sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra;  
sin ellas sólo se conseguiría vagar por un oscuro laberinto.

GALILEO GALILEI (1564-1642)

## 1 La clotoide como curva

### 1.1 Introducción

La clotoide, también conocida como radioide de arcos o espiral de Cornu, recibe su nombre del vocablo griego Klothó que significa "hilandera", es una de las curvas que pertenece a la familia de las espirales, es decir, curvas planas tales que su radio viene dado en función del ángulo:  $\rho = f(\theta)$ . Probablemente fué estudiada por el primer destacado matemático de la familia de los Bernouilli, Jacques Bernouilli (1654-1705) que también se dedicó al estudio de la espiral logarítmica. Otros nombres que recibe esta curva son espiral de Euler (Leonhard Euler, 1707-1783) o espiral de Cornu, en honor del físico francés Alfred Marie Cornu (1841-1902) quién utilizó esta curva en el diseño de un aparato para medir la intensidad de la luz.

Su utilización más inmediata está en los trazados en planta de obras lineales (carreteras, ferrocarriles, canalizaciones, etc) como curva de transición en carreteras para unir tramos rectos (es decir, con curvatura  $k = 0$ ) con tramos curvos (curvatura  $k \neq 0$ ) o para conectar dos tramos circulares (de curvaturas  $k_1$  y  $k_2$ ). Ésta es su característica más importante, ya que el radio de curvatura disminuye de manera inversamente proporcional a la distancia recorrida sobre ella, y esto permite al conductor adaptarse de forma suave al cambio de trayectoria. Los nuevos trazados de carreteras están diseñados como una sucesión de clotoides, así evitamos los tramos rectos excesivamente largos que podían llevar a una conducción monótona, lo que puede provocar distracción y riesgo de accidentes. Para esos casos se utilizan tramos de clotoide con curvatura grande y adaptadas según la longitud que tengamos que cubrir, ya que todas las clotoides son proporcionales y sólo difieren en la escala. La perspectiva que nos ofrece su diseño geométrico y que se traduce en mayor distancia de visibilidad y su fácil adaptación al terreno, son otras de las ventajas de la clotoide. Del estudio dinámico de la clotoide extraemos que, relacionando adecuadamente el radio de curvatura, el peralte y la velocidad, se realizan trazados de carreteras que nos proporcionan sensación de seguridad y comodidad en la conducción.

En este trabajo partimos de la propiedad geométrica que define una clotoide, es decir, una curva plana que en cada uno de sus puntos el producto del radio de curvatura por la longitud de arco recorrido desde el origen es constante e igual a  $A^2$ , y obtenemos su ecuación a partir de las llamadas integrales de Fresnel. En segundo lugar, representamos geoméricamente las propiedades que se derivan. En tercer lugar obtenemos una aproximación numérica de la clotoide. Y por último, utilizamos esas aproximaciones para presentar un ejemplo.

### 1.2 Curvas planas a partir de sus ecuaciones intrínsecas

Consideremos una curva plana (así su torsión será nula  $\tau = 0$ ) contenida en el plano  $OXY$ , esto es, en el plano  $Z = 0$ . Sea

$$r(s) = (x(s), y(s))$$

su representación paramétrica en función del parámetro longitud de arco  $s$  y  $\varphi(s)$  es el ángulo que forma el eje  $OX$  con el vector tangente unitario  $\vec{t}(s)$  en el punto  $r(s)$  (ver Figura 1).

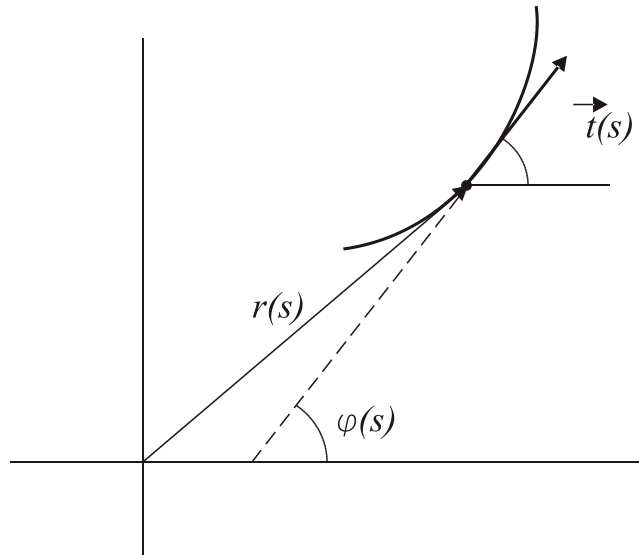


Figura 1: Curva plana.

Entonces

$$\vec{t}(s) = r'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$$

derivando y tomando normas

$$\vec{t}'(s) = (-\varphi'(s) \sin \varphi(s), \varphi'(s) \cos \varphi(s)) = \varphi'(s)(-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s)) = k(s)\vec{n}(s)$$

$$\rightarrow |k(s)| = |\varphi'(s)| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\|$$

Si  $k(s)$  y  $\varphi'(s)$  tienen el mismo signo, entonces:

$$k(s) = \frac{d\varphi}{ds} \rightarrow \int_{s_0}^s d\varphi = \int_{s_0}^s k(s)ds \rightarrow \varphi(s) - \varphi(s_0) = \int_{s_0}^s k(s)ds$$

Además

$$\begin{aligned} (x'(s), y'(s)) &= (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} x'(s) = \cos \varphi(s) & \rightarrow x(s) - x(s_0) = \int_{s_0}^s \cos \varphi(s)ds \\ y'(s) = \sin \varphi(s) & \rightarrow y(s) - y(s_0) = \int_{s_0}^s \sin \varphi(s)ds \end{cases} \end{aligned}$$

Si tomamos ahora como parámetro el ángulo  $\varphi$  en lugar de  $s$  entonces:

$$\begin{aligned} ds = \frac{d\varphi}{k(s(\varphi))} &\rightarrow \begin{cases} x'(s(\varphi)) = \cos \varphi \\ y'(s(\varphi)) = \sin \varphi \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} x(\varphi) - x(\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} s'(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{k(s(\varphi))} \cos \varphi d\varphi \\ y(\varphi) - y(\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} s'(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{k(s(\varphi))} \sin \varphi d\varphi \end{cases} \end{aligned}$$

### 1.3 Estudio particular de la Clotoide

Sea  $r(s)$  la representación paramétrica regular de una curva plana tal que en cada punto el producto del radio de curvatura,  $r$ , por la longitud de arco recorrido desde el origen,  $s$ , sea siempre constante e igual a  $A^2$  entonces:

(a) su ecuación viene dada por

$$r(s) = \left( \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds, \int_0^s \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds \right)$$

(b) la posición de la curva en el límite cuando  $s$  tiende a  $+\infty$  es

$$r(+\infty) = \left( \frac{A}{2}\sqrt{\pi}, \frac{A}{2}\sqrt{\pi} \right)$$

(c) En el origen  $(0,0)$  la curva tiene curvatura  $k = 0$  y crece linealmente hasta  $k = \infty$  en el punto  $\left(\frac{A}{2}\sqrt{\pi}, \frac{A}{2}\sqrt{\pi}\right)$  alrededor del que se enrolla.

En la Figura 2 tenemos representada una clotoide de parámetro  $A = 2$  y ecuación

$$r(s) = \left( \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{8}\right) du, \int_0^s \sin\left(\frac{u^2}{8}\right) du \right),$$

con  $s \in [-20, +20]$  y el punto donde converge  $P = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \simeq (1.77, 1.77)$ .

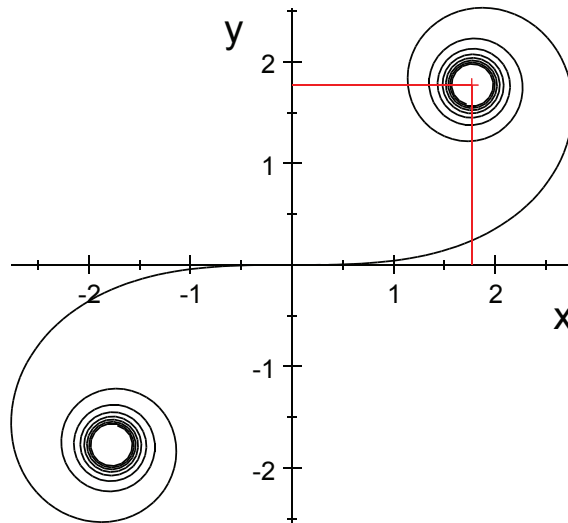


Figura 2: Punto de convergencia en una clotoide.

Veamos con detalle cada una de las afirmaciones anteriores:

(a) Partimos de la propiedad que caracteriza a una clotoide y es que en todo punto  $P$  de la misma el producto del radio de curvatura  $r_c$  por la longitud del arco recorrido  $l$  (o  $s$ ) es constante e igual a  $A^2$  siendo  $A$  el parámetro de la clotoide, es decir:

$$RL = r_c l = A^2 \rightarrow r_c = \frac{A^2}{l} = \frac{A^2}{s}$$

Como la curvatura  $k = \frac{1}{r_c}$ , obtendremos la ecuación de la clotoide haciendo uso del apartado anterior donde se calculaba la ecuación de una curva plana a partir de su curvatura. En este caso tenemos que

$$k = \frac{1}{r_c} = \frac{l}{A^2} = \frac{s}{A^2} = \frac{d\varphi}{ds} \rightarrow \int d\varphi = \int \frac{s}{A^2} ds \rightarrow \varphi(s) = \frac{s^2}{2A^2}$$

y sustituyendo para  $s_0 = 0$ ,  $O = (x(s_0), y(s_0)) = (0, 0)$ , resulta la expresión inicial:

$$\left. \begin{aligned} x(s) - x(s_0) &= \int_{s_0}^s \cos \varphi(s) ds = \int_0^s \cos \left( \frac{s^2}{2A^2} \right) ds \\ y(s) - y(s_0) &= \int_{s_0}^s \sin \varphi(s) ds = \int_0^s \sin \left( \frac{s^2}{2A^2} \right) ds \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow r(s) = (x(s), y(s)) = \left( \int_0^s \cos \left( \frac{s^2}{2A^2} \right) ds, \int_0^s \sin \left( \frac{s^2}{2A^2} \right) ds \right)$$

(b) Si realizamos el cambio de variable muda dentro de la integral  $s = \sqrt{\pi}Au$  entonces tenemos

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos \left( \frac{s^2}{2A^2} \right) ds = \int_0^{s/(\sqrt{\pi}A)} \cos \left( \frac{(\sqrt{\pi}Au)^2}{2A^2} \right) \sqrt{\pi}A du = \\ &= \sqrt{\pi}A \int_0^{s/(\sqrt{\pi}A)} \cos \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(s) &= \int_0^s \sin \left( \frac{s^2}{2A^2} \right) ds = \int_0^{s/(\sqrt{\pi}A)} \sin \left( \frac{(\sqrt{\pi}Au)^2}{2A^2} \right) \sqrt{\pi}A du = \\ &= \sqrt{\pi}A \int_0^{s/(\sqrt{\pi}A)} \sin \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du \end{aligned}$$

Las integrales de estas expresiones  $\int_0^s \cos \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du$  y  $\int_0^s \sin \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du$  se denominan **Integrales de Fresnel** del coseno y seno, respectivamente. Aparecen también en el estudio de difracción de la luz. Para estas integrales se cumple que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du &= \int_0^{+\infty} \sin \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du = \frac{1}{2} \\ \int_0^{-\infty} \cos \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du &= \int_0^{-\infty} \sin \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego  $r(+\infty) = (x(+\infty), y(+\infty)) = \left( \frac{\sqrt{\pi}A}{2}, \frac{\sqrt{\pi}A}{2} \right)$ , puesto que

$$\begin{cases} x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi}A \int_0^{s/(\sqrt{\pi}A)} \cos \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du = \frac{\sqrt{\pi}A}{2} \\ y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi}A \int_0^{s/(\sqrt{\pi}A)} \sin \left( \frac{\pi u^2}{2} \right) du = \frac{\sqrt{\pi}A}{2} \end{cases}$$

y análogamente para  $r(-\infty) = (x(-\infty), y(-\infty)) = \left( -\frac{\sqrt{\pi}A}{2}, -\frac{\sqrt{\pi}A}{2} \right)$ .

(c) Se puede ver fácilmente que si partimos de la ecuación paramétrica de la clotoide

$$r(s) = (x(s), y(s)) = \left( \int_0^s \cos \left( \frac{s^2}{2A^2} \right) ds, \int_0^s \sin \left( \frac{s^2}{2A^2} \right) ds \right)$$

por ser una curva parametrizada respecto del parámetro longitud de arco,  $s$ , entonces

$$\vec{t}(s) = r'(s) = \left( \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right), \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \right)$$

derivando tenemos

$$\vec{t}'(s) = \left( -\frac{s}{A^2} \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right), \frac{s}{A^2} \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \right)$$

y la curvatura en cada punto

$$k(s) = \|r''(s)\| = \|\vec{t}'(s)\| = \left\| \left( -\frac{s}{A^2} \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right), \frac{s}{A^2} \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \right) \right\| = \frac{s}{A^2}$$

de donde

$$A^2 = \frac{s}{k(s)} = s \times r_c(s)$$

La curvatura en cada punto  $P = r(s)$  viene dada por la inversa del radio de curvatura

$$k(s) = \frac{1}{r_c(s)} = \frac{s}{A^2}$$

de modo que  $k(s)$  es una función lineal y proporcional al parámetro longitud de arco  $s$  y si  $s \in [0, L]$  entonces  $k(s) \in [0, L/A^2]$ .

## 2 Propiedades geométricas

### 2.1 Proporcionalidad

Una propiedad que caracteriza a las clotoides es que todas son proporcionales (como podemos apreciar en la Figura 3) y sólo difieren en la escala, encontrar el factor de escala es lo que necesitaremos para construir un arco de clotoide.

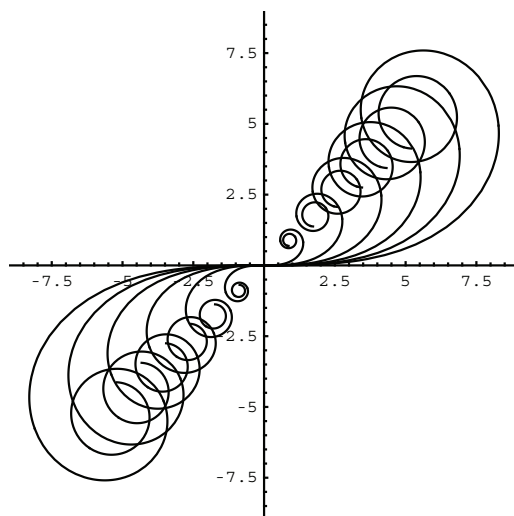


Figura 3: Clotoides proporcionales.

## 2.2 Variación del radio de curvatura

Hemos dicho que el radio de curvatura es inversamente proporcional a la longitud de arco recorrido. En la Figura 4 vemos dibujados los radios de curvaturas o radio vector, con sus correspondientes circunferencias osculadoras:

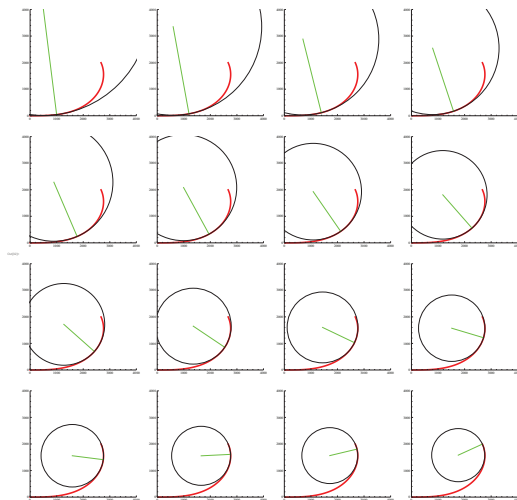


Figura 4: Clotoide con radios de curvatura y circunferencias osculadoras.

Podemos apreciar la variación constante de dicho radio en la Figura 5 donde se encuentran dibujadas todas las gráficas anteriores juntas:

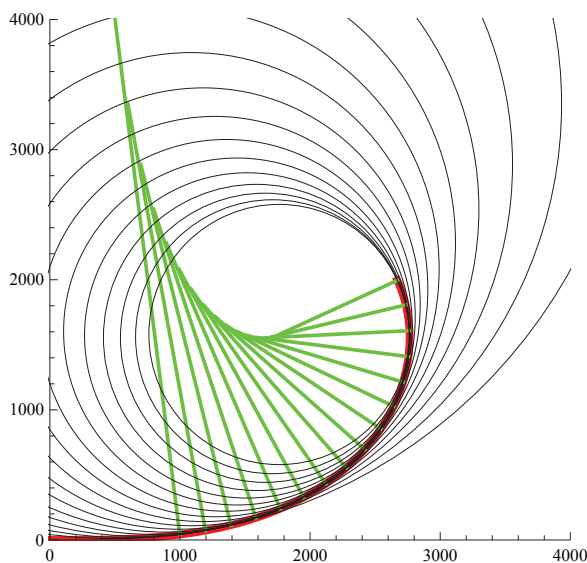


Figura 5: Variación del radio de curvatura en una clotoide.

## 3 La clotoide en topografía

Cuando se empezaron a construir los primeros ferrocarriles, las velocidades que se alcanzaban eran bajas y por ello no era preciso utilizar curvas de transición entre un trazado recto y un arco de circunferencia. Pero cuando se aumentó la velocidad, fué necesario usar curvas de transición

que permitieran que la curvatura variase gradualmente. Las primeras curvas utilizadas fueron **parábolas cúbicas**. Este tipo de curva junto con la **lemniscata** de Bernouilli y la **clotoide** son las tres curvas de transición más utilizadas (ver Figura 6). Con las construcciones de las primeras autopistas se empezaron a utilizar las clotoides.

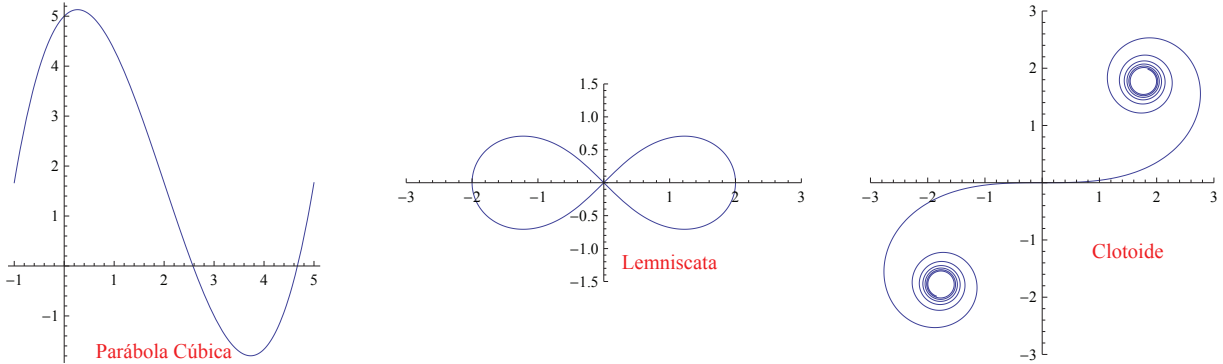


Figura 6: Curvas de transición clásicas.

En la Figura 7 tenemos representado un arco de clotoide con los elementos que se utilizan en el trazado de curvas para unir un tramo recto con un tramo de circunferencia que designamos como  $O_{cir}$ :

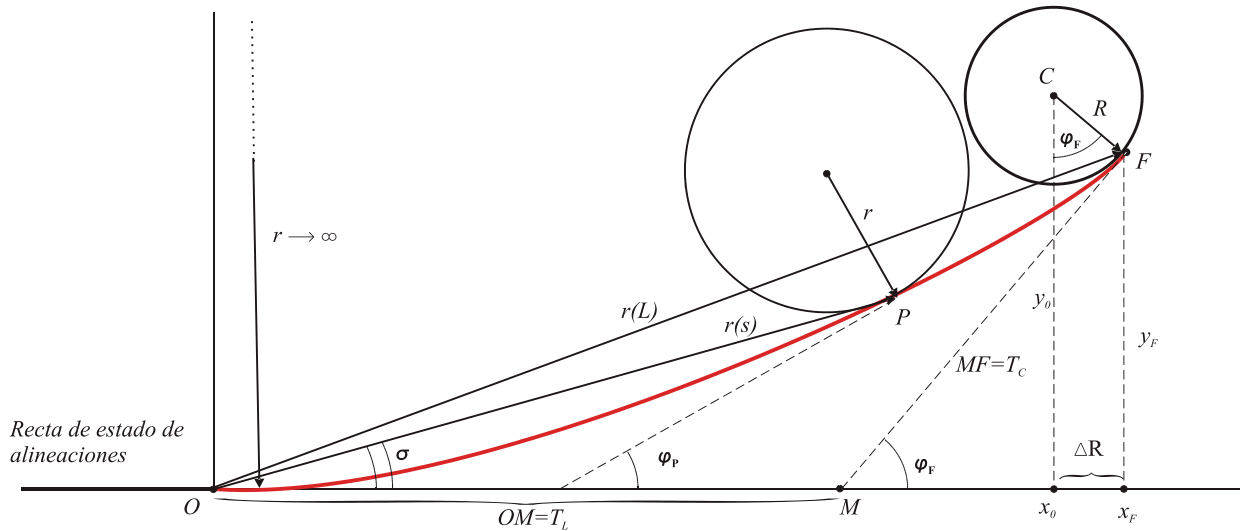


Figura 7: La clotoide en Topografía.



(1) El eje  $OX$  es el llamado *estado de alineaciones* y su semieje negativo es el *tramo recto* que debemos unir con el tramo curvo.

(2) El origen  $O = (0, 0)$  es el *punto de inicio* del tramo de clotoide, donde se une con el tramo recto.

(3) El punto  $F = (x_F, y_F)$  es el *punto final* del tramo de clotoide, donde se une con el tramo curvo o arco de la circunferencia  $O_{cir}$ .

(4) El punto  $C = (x_0, y_0)$  es el *centro de la circunferencia* que contiene el arco que vamos a conectar, y  $R$  es *radio de curvatura* de la misma.

(5) El *retranqueo* es  $x_F - x_0 = \Delta R$ .

(6) El vector de posición de cada punto de la clotoide desde el origen  $O$ , es  $r(s)$  siendo  $s$  el parámetro longitud de arco.

(7) La *longitud del arco de clotoide* entre  $O$  y  $F$  es  $L$ , es decir,  $r(L) = F$ .

(8) La *recta tangente* a  $O_{cir}$  en el punto  $F$  la denominaremos  $T_F$ .

(9) El ángulo entre  $T_F$  y el eje  $OX$  lo llamaremos *ángulo girado* y lo designaremos como  $\varphi_F$ , siendo

$$\tan \varphi_F = \frac{x_F - x_0}{y_0 - y_F}$$

(10) Se considera la siguiente relación entre el ángulo girado,  $\varphi_F$ , el radio de curvatura en  $F$ ,  $R$ , y la longitud de la clotoide,  $L$ :  $\varphi_F = \frac{L}{2R}$ .

(11) Los segmentos  $\overline{OM} = T_L$  y  $\overline{MF} = T_c$  se denominan *tangente larga* y *tangente corta*, respectivamente.

(12) El segmento o cuerda que une el origen  $O$  con  $F$  lo designamos como  $S_L = \overline{OF}$ .

(13) El ángulo que forma la cuerda  $S_L$  con la recta estado de alineaciones lo llamamos  $\sigma$ .

## 4 Aproximación numérica

### 4.1 ¿Cómo calcular las ecuaciones?

Para conocer una clotoide en particular necesitamos su parámetro  $A$ , y sabemos que  $A^2 = RL$  siendo  $F$  el punto de enlace con el tramo de circunferencia,  $R$ , el radio de curvatura de dicha circunferencia, y  $L$  la longitud de arco total. En este caso, en lugar de utilizar la relación  $\varphi_F = \frac{L}{2R}$  para calcular una aproximación de la longitud de la clotoide, utilizaremos el desarrollo de orden 7 de la función tangente:

$$\tan x \simeq x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7$$

En general, en cada punto  $P = r(s)$  de la curva se cumple que si

$$r(s) = \left( \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2RL}\right) ds, \int_0^s \sin\left(\frac{s^2}{2RL}\right) ds \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow r'(s) = \left( \cos\left(\frac{s^2}{2RL}\right), \sin\left(\frac{s^2}{2RL}\right) \right) \rightarrow \tan \varphi_P = \frac{\sin\left(\frac{s^2}{2RL}\right)}{\cos\left(\frac{s^2}{2RL}\right)}$$

y en particular, para el punto extremo  $F$  tenemos:

$$\tan \varphi_F = \frac{x_F - x_0}{y_0 - y_F} = \frac{\sin\left(\frac{L^2}{2RL}\right)}{\cos\left(\frac{L^2}{2RL}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{L}{2R}\right)}{\cos\left(\frac{L}{2R}\right)} = \tan\left(\frac{L}{2R}\right)$$

$$\tan\left(\frac{L}{2R}\right) \simeq \frac{L}{2R} + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2R}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{L}{2R}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(\frac{L}{2R}\right)^7$$

Con todo esto, el proceso será el siguiente:

(a) Calculamos el valor de  $\tan(\varphi_F)$ , a partir de los datos de los puntos  $F = (x_F, y_F)$  y  $C = (x_0, y_0)$ :

$$\tan(\varphi_F) = \frac{x_F - x_0}{y_0 - y_F}$$

(b) Aplicamos la relación anterior para obtener una ecuación de séptimo grado en  $L$  que resolvemos de forma aproximada:

$$\tan(\varphi_F) \simeq \frac{L}{2R} + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2R}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{L}{2R}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(\frac{L}{2R}\right)^7 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x_F - x_0}{y_0 - y_F} = \frac{L}{2R} + \frac{L^3}{24R^3} + \frac{L^5}{240R^5} + \frac{17L^7}{40320R^7} \rightarrow$$

$$\rightarrow L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$$

(c) Una vez seleccionado el valor de  $L$  real, sustituimos en la expresión inicial:

$$r(s) = (x(s), y(s)) = \left( \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds, \int_0^s \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds \right) =$$

$$= \left( \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2RL}\right) ds, \int_0^s \sin\left(\frac{s^2}{2RL}\right) ds \right)$$

(d) Aproximamos las funciones trigonométricas tomando los desarrollos de Taylor con los seis primeros términos no nulos para  $x(s)$ :

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2RL}\right) ds \simeq \int_0^s \left[ 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{s^2}{2RL}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4!}\left(\frac{s^2}{2RL}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{s^2}{2RL}\right)^6 + \frac{1}{8!}\left(\frac{s^2}{2RL}\right)^8 - \frac{1}{10!}\left(\frac{s^2}{2RL}\right)^{10} \right] ds =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^s \left[ 1 - \frac{s^4}{2!(2RL)^2} + \frac{s^8}{4!(2RL)^4} - \frac{s^{12}}{6!(2RL)^6} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{s^{16}}{8!(2RL)^8} - \frac{1}{10!} \frac{s^{20}}{(2RL)^{10}} \right] ds = \\
 &= s - \frac{s^5}{2! \times 5 (2RL)^2} + \frac{s^9}{4! \times 9 (2RL)^4} - \frac{s^{13}}{6! \times 13 (2RL)^6} + \\
 &\quad + \frac{s^{17}}{8! \times 17 (2RL)^8} - \frac{s^{21}}{10! \times (2RL)^{10}}
 \end{aligned}$$

y para  $y(s)$ :

$$\begin{aligned}
 y(s) &= \int_0^s \sin\left(\frac{s^2}{2RL}\right) ds \simeq \int_0^s \left[ \frac{s^2}{2RL} - \frac{1}{3!} \left(\frac{s^2}{2RL}\right)^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5!} \left(\frac{s^2}{2RL}\right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{s^2}{2RL}\right)^7 + \frac{1}{9!} \left(\frac{s^2}{2RL}\right)^9 - \frac{1}{11!} \left(\frac{s^2}{2RL}\right)^{11} \right] ds = \\
 &= \int_0^s \left[ \frac{s^2}{2RL} - \frac{s^6}{3!(2RL)^3} + \frac{s^{10}}{5!(2RL)^5} - \frac{s^{14}}{7!(2RL)^7} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{s^{18}}{9!(2RL)^9} - \frac{s^{22}}{11!(2RL)^{11}} \right] ds = \\
 &= \frac{s^3}{2 \times 3RL} - \frac{s^7}{3! \times 7 (2RL)^3} + \frac{s^{11}}{5! \times 11 (2RL)^5} - \frac{s^{15}}{7! \times 15 (2RL)^7} + \\
 &\quad + \frac{s^{19}}{9! \times 19 (2RL)^9} - \frac{s^{23}}{11! \times 23 (2RL)^{11}}
 \end{aligned}$$

(e) Integramos término a término, es decir:

$$\begin{aligned}
 x(s) &\simeq s - \frac{s^5}{2! \times 5 (2RL)^2} + \frac{s^9}{4! \times 9 (2RL)^4} - \frac{s^{13}}{6! \times 13 (2RL)^6} + \\
 &\quad + \frac{s^{17}}{8! \times 17 (2RL)^8} - \frac{s^{21}}{10! \times (2RL)^{10}} \\
 y(s) &\simeq \frac{s^3}{2 \times 3RL} - \frac{s^7}{3! \times 7 (2RL)^3} + \frac{s^{11}}{5! \times 11 (2RL)^5} - \frac{s^{15}}{7! \times 15 (2RL)^7} + \\
 &\quad + \frac{s^{19}}{9! \times 19 (2RL)^9} - \frac{s^{23}}{11! \times 23 (2RL)^{11}}
 \end{aligned}$$

y de ese modo obtenemos las fórmulas para el cálculo de las coordenadas de  $r(s)$ .

## 4.2 Ejemplo

Buscaremos de forma aproximada la ecuación de una clotoide que una el tramo recto desde el origen de coordenadas con el punto de enlace  $F$  del arco de circunferencia siendo el centro de la misma  $C$  y las coordenadas de dichos puntos:

- (1)  $F = (x_F, y_F) = (1040, 267)$
- (2)  $C = (x_0, y_0) = (570, 820)$

Lo tenemos representado en la Figura 8:

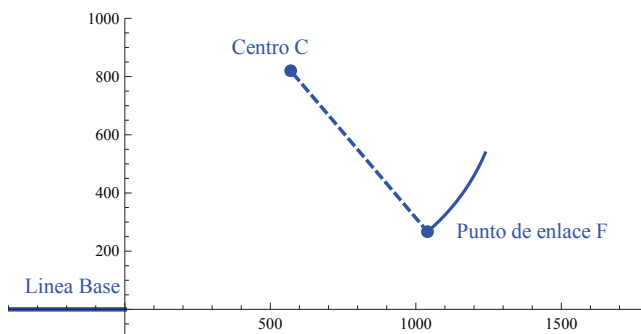


Figura 8: Dibujo de los datos iniciales.

(a) En primer lugar calculamos el radio de curvatura,  $R$ :

$$R = \sqrt{(1040 - 570)^2 + (267 - 820)^2} = \sqrt{526709} \simeq 725.747$$

y el ángulo girado  $\varphi_F$ :

$$\tan(\varphi_F) = \frac{1040 - 570}{820 - 267} = \frac{470}{553} \simeq 0.84991$$

(b) Planteamos la ecuación de séptimo grado para determinar  $L$ :

$$\begin{aligned} \tan(\varphi_F) &\simeq \frac{L}{2R} + \frac{L^3}{24R^3} + \frac{L^5}{240R^5} + \frac{17L^7}{40320R^7} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{470}{553} &= \frac{20160LR^6 + 1680L^3R^4 + 168L^5R^2 + 17L^7}{40320R^7} \rightarrow \\ \rightarrow 20160LR^6 + 1680L^3R^4 + 168L^5R^2 + 17L^7 - \frac{470}{553} \times 40320R^7 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow 20160L \left(\sqrt{526709}\right)^6 + 1680L^3 \left(\sqrt{526709}\right)^4 + 168L^5 \left(\sqrt{526709}\right)^2 + \\ + 17L^7 - \frac{470}{553} \times 40320 \left(\sqrt{526709}\right)^7 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow L = 1023.49 \text{ única solución real} \end{aligned}$$

(c) El parámetro de la clotoide será  $A$  con

$$A^2 = RL = \sqrt{526709} \times 1023.49 \simeq 742793$$

y por lo tanto la ecuación en paramétricas obtenida es el resultado de sustituir  $RL \simeq 742793$  en

$$r(s) = (x(s), y(s))$$

La gráfica de esta clotoide es la siguiente:

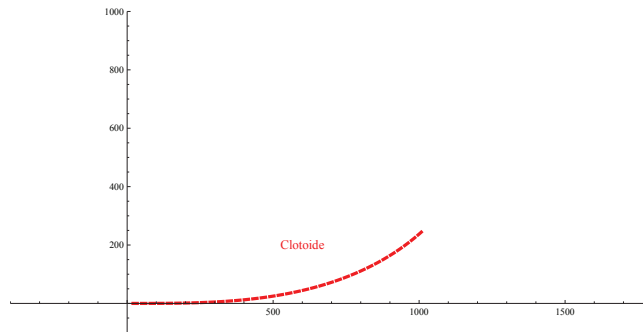


Figura 9: Tramo de clotoide.

En la Figura 9 tenemos representado el arco de circunferencia, el radio vector en el punto de enlace y la aproximación de la clotoide obtenida.

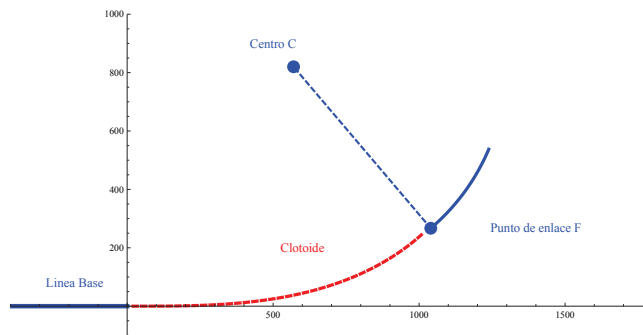


Figura 10: La clotoide como enlace.



# Referencias

- [1] J. Berwein, M. P. Skerritt. *Una introducción a la Computación Matemática moderna con Mathematica*, Springer 2012.
- [2] I. de Corral Manuel de Villena. *Topografía y replanteo de obra de ingeniería*, Editorial UPC, Barcelona, 2001.
- [3] E. Kreyszig. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería I y II*, Limusa, 1992.
- [4] E. Kreyszig. *Differential Geometry*, Dover, 1988.
- [5] P. K. Kythe, P. Puri, M. R. Schäferkötter. *Partial Differential Equations and Mathematica*, CRC, 1997.
- [6] M. Lipschutz. *Geometría Diferencial*, McGraw-Hill, 1971.
- [7] D. J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, 1988.
- [8] C. R. Wylie. *Matemáticas Superiores para Ingeniería*, McGraw-Hill, 1986.

