MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING
Volume 12 (2), 2019 DOI: 10.4995/msel.2019.10977.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Un estudio exploratorio sobre el conocimiento del maestro para guiar actividades de modelización matemática en Educación Primaria

An exploratory study of teacher knowledge to guide mathematical modeling activities in Primary Education

Ruben Fuertes, Lluís Albarracín
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
rfuerte3@xtec.cat, lluis.albarracin@uab.cat

Abstract

En este artículo se presenta una investigación de tipo exploratorio para caracterizar el conocimiento del profesor necesario para guiar una actividad de modelización en Educación Primaria. Como actividad se ha elegido un problema de Fermi y el marco teórico sobre conocimiento del profesor utilizado es el Knowledge Quartet de Rowland. El análisis de las intervenciones de una maestra experta durante una actividad nos permite identificar los conocimientos clave que pone en marcha la maestra. Entre ellos destacamos las activaciones cognitivas de los alumnos durante las fases de elaborar un plan y ejecutarlo.

This article presents exploratory research to characterize the teacher's knowledge needed to guide a modeling activity in Primary Education. A Fermi problem has been chosen as modeling activity and the theoretical framework on teacher knowledge used is the Rowland's Knowledge Quartet. The analysis of an expert teacher's interventions during the class activity allows us to identify the key knowledge that the teacher sets in motion. Among them we highlight the cognitive activations of students during the phases of developing a plan and executing it.

Palabras clave: Conocimiento del profesor, modelización matemática, Problemas de Fermi, Educación Primaria
Keywords: Knowledge for teaching, mathematical modeling, Fermi problems, Primary School

1. Introducción

Este trabajo presenta un estudio exploratorio de tipo cualitativo sobre el conocimiento del maestro de Educación Primaria necesario para gestionar adecuadamente una actividad de modelización matemática en el aula.

Desde el ICMI 14 (Blum, 2002) se ha desarrollado un movimiento dentro de la Educación Matemática con la intención de llevar a las aulas actividades que muestren la fuerte relación que existe entre las matemáticas y el mundo que nos rodea. De hecho, en los últimos años se ha incrementado el interés por introducir nuevas actividades que incluyan la modelización matemática en los planes de estudios de diferentes niveles educativos (Vörholter, Kaiser & Borromeo Ferri, 2014). Sin embargo, los esfuerzos en la investigación se han dirigido mayoritariamente a los niveles educativos más altos y la literatura al respecto centrada en los procesos de modelización de los alumnos de Educación Primaria es escasa (Stohlmann & Albarracín, 2016).

En el sistema educativo español, el currículo de Educación Secundaria Obligatoria ha incluido recientemente y de manera explícita la práctica de procesos de matematización y modelización, tanto en contextos de la realidad como en contextos propiamente matemáticos (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria Obligatoria y el Bachillerato, 2015). Como cualquier cambio de contenidos o de metodologías, la introducción de las actividades de modelización matemática en las aulas de Educación Primaria supone un reto para el profesorado. En las últimas décadas el conocimiento pedagógico y didáctico del profesor ha sido uno de los mayores centros de interés en el área de la Educación Matemática. En esta área, podemos tomar como punto de partida los trabajos de Shulman (1986) que hizo notar que las investigaciones anteriores no consideraban como variable el tipo de conocimiento a enseñar.

Estos dos aspectos centrales del trabajo presentado (modelización matemática y conocimiento del profesor de matemáticas) han sido estudiados ampliamente como campos independientes, con lo que para poder desarrollar este trabajo ha sido necesario tomar algunas decisiones para concretar la investigación desarrollada. En primer lugar, la tarea de modelización utilizada es un problema de Fermi, que es un tipo de problema que permite a los alumnos conectar sus conocimientos matemáticos con fenómenos del mundo real (Ärlebäck, 2009). Por otra parte, el marco teórico utilizado para analizar la intervención de la maestra participante en el estudio piloto ha sido el Knowledge Quartet de Rowland (2013), ya que la forma de su desarrollo liga de forma clara con el tipo de actividades utilizadas en este estudio y, en consecuencia, el tipo de comportamiento que identifica en la práctica docente del maestro.

Los resultados del estudio se enmarcan en la concreción de tres aspectos clave de la gestión de una actividad de modelización situados durante la elaboración de un plan de acción y la ejecución del plan y se basan en la activación cognitiva de los alumnos durante la actividad.

2. Marco teórico

A continuación se detallan los aspectos teóricos que fundamentan este trabajo. El primer foco de interés es la modelización matemática y los problemas de Fermi como tipo de actividades que permiten introducirla en las aulas de Educación Primaria. El segundo foco es el conocimiento didáctico del profesor, que permitirá desarrollar el análisis de este trabajo.

2.1. Resolución de problemas contextualizados y modelización matemática

En este trabajo utilizamos la resolución de un problema como propuesta de aula para promover la actividad de modelización matemática. En este sentido, entendemos que un problema matemático es *"an unifamiliar situation for which an individual does not know how to carry out its solution"* (Schoenfeld, 1985). De esta forma, en la resolución de un problema, los alumnos no conocen un método concreto para abordarlo y deben generar su propia resolución. Polya (1945) divide la resolución de un problema en cuatro pasos: i) comprender el problema; ii) elaborar un plan para resolverlo, iii) ejecutar este plan; y iv) mirada retrospectiva final. En concreto, la primera fase consiste en la identificación, definición y comprensión del problema. En esta fase se reconoce la existencia de un problema por parte del resolutor y la necesidad de resolverlo. La segunda fase de la resolución se centra en la planificación de la solución. Se trata de diseñar el esquema de actuación a seguir e identificar los objetivos a cumplir tras examinar las posibles estrategias generales que se pueden aplicar. La tercera fase es la ejecución del plan que se ha diseñado previamente, llevando a cabo las acciones particulares que se han planificado e ir regulando la actuación con el objetivo de que ésta se ajuste al plan fijado. La cuarta fase de la resolución es la retrospección, en la que se realiza una verificación de la tarea y de las decisiones tomadas, así como la validación de la solución y de los resultados obtenidos a partir del plan inicial.

Existe una gran cantidad de problemas matemáticos que pueden proponerse en el ámbito escolar, pero en las últimas décadas han tomado relevancia los problemas con contextos reales, por la necesidad de mostrar a los alumnos la conexión de las matemáticas con el mundo real e introducir la modelización matemática en las aulas (Vörholter et al., 2014). Para Winter (1994), la resolución de problemas de contexto real incluye la matematización de una situación no-matemática, a partir de la cual se crea un modelo matemático que respeta esta realidad, el procedimiento de la resolución y el posterior traspaso de la solución, obtenida gracias al modelo creado, a la situación real del problema. En el proceso de resolución de un problema de contexto real se puede generar un modelo matemático que describe la realidad o fenónemo estudiado. En este trabajo tomamos la siguiente definición de modelo matemático propuesta por Lesh and Harel (2003):

> "Los modelos son sistemas conceptuales que tienden a ser expresados usando una variedad de medios de representación que interactúan entre ellos y que pueden incluir símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficos por ordenador, diagramas en papel, gráficos o metáforas basadas en la experiencia. Sus propósitos son construir, describir o explicar otro(s) sistema(s). Los modelos incluyen tanto: (a) un sistema conceptual para describir o explicar los objetos matemáticos relevantes, así como las relaciones, acciones, patrones y regularidades que se atribuyen a la situación de resolución de problemas; y (b) los procedimientos que los acompañan para generar construcciones útiles, manipulaciones o predicciones para el logro de objetivos claramente reconocidos."

Esta definición nos muestra que un modelo matemático es un constructo en el que podemos identificar dos tipos de elementos, los conceptuales y los procedimentales. Estos elementos se coordinan con el propósito de describir un sistema -generalmente complejo- y pueden ser expresados utilizando varios tipos de lenguajes, desde el algebraico a representaciones gráficas en forma de esquemas.

El proceso de creación de un modelo matemático para describir un fenómeno es lo que denominamos proceso de modelización. En las actividades y problemas de modelización los alumnos deben generar modelos que se puedan aplicar a la realidad o al contexto dado y que, además, tanto los modelos generados como las soluciones que se derivan de ellos se puedan generalizar e interpretar (Doerr & English, 2003). Así, un objeto central de estudio sobre la modelización matemática es conocer y entender cuáles son los pasos o procesos que los alumnos siguen a la hora de crear modelos. Existe discusión al respecto, pero generalmente se acepta que es un proceso complejo y multicíclico, en el sentido de que requiere de diversas reiteraciones del proceso para poder refinar el modelo generado. El marco teórico más aceptado para describir la actividad de modelización es el denominado ciclo de modelización, propuesto inicialmente por Blum and Leiss (2007), que presenta una diferenciación entre el dominio real y el matemático y representa el proceso de modelización como una cadena de procesos (entender la situación; simplificarla; trabajar matemáticamente; interpretar, validar y exponer los resultados obtenidos) que se pueden repetir cíclicamente hasta obtener una respuesta adecuada a la pregunta formulada.

2.2. Problemas de Fermi

Los problemas de Fermi provienen de la tradición de la enseñanza de la Física (Robinson, 2008) y suponen una herramienta para proponer actividades en las que se promueve la modelización matemática (Albarracín, 2017). El uso de un problema de Fermi en nuestro trabajo nos permite proponer una situación realista simple a los alumnos donde se les pide un análisis matemático que promueva la construcción de modelos matemáticos. Siguiendo a Ärlebäck (2009), consideramos que los problemas de Fermi son problemas abiertos y no estándar que requieren que los estudiantes hagan hipótesis sobre la situación del problema y hagan estimaciones de las cantidades adecuadas antes de iniciar una serie de cálculos sencillos. Ärlebäck (2011) argumenta que trabajar con problemas de Fermi puede ser útil para introducir el trabajo de modelización en el aula, ya que son accesibles para los estudiantes y no necesariamente dependen de conocimientos matemáticos previos. Algunos ejemplos de problemas de Fermi utilizados en diferentes investigaciones son: la estimación del número de coches en un tramo de carretera (Peter-Koop, 2009), la estimación del tiempo necesario para subir las escaleras del Empire State Building en Nueva York (Ärlebäck, 2009) o la estimación del número de personas que participan en una manifestación (Albarracín & Gorgorió, 2014). Se pueden encontrar más ejemplos de problemas de Fermi y sus resoluciones se en Weinstein and Adam (2009), así como una propuesta para su uso en las aulas para promover la modelización en Albarracín and Gorgorió (2015)

Disponemos de estudios previos que muestran que el uso de los problemas de Fermi en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas facilita la introducción de las actividades de modelización en las aulas de diferentes niveles educativos. Peter–Koop (2009) utilizó los problemas de Fermi con los estudiantes de Educación Primaria (de edades de 10 a 12 años) para analizar sus estrategias de resolución. Basándose en sus investigaciones, Peter-Koop llegó a la conclusión de que a) los estudiantes resolvían los problemas de varias formas diferentes, b) los estudiantes desarrollaban nuevos conocimientos matemáticos para llegar a sus soluciones, y c) los procesos de resolución de problemas que los estudiantes mostraron eran de carácter multicíclico y seguían el ciclo de modelación. Ärlebäck (2009) analizó los procesos de modelización de un grupo de estudiantes de Educación Secundaria dedicados a resolver un problema de Fermi. Con este trabajo, destacó la importancia de las relaciones sociales en el trabajo en grupo y la relevancia del conocimiento extra-matemático para poder analizar la situación estudiada en un entorno de resolución de problemas. Albarracín & Gorgorió (2014) analizaron las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos de Educación Secundaria en diversos problemas de Fermi y observaron una gran cantidad de estrategias y maneras de construir los modelos utilizados para llegar a sus respuestas.

Gallart, Ferrando, García-Raffi, Albarracín & Gorgorió (2017) desarrollaron una herramienta para caracterizar modelos matemáticos basada en la definición de Lesh y Harel (2003). Gallart, Ferrando, García–Raffi, Albarracín & Gorgorió (2017) usaron la herramienta construida para analizar la producción de estudiantes de Educación Secundaria durante el trabajo en una secuencia de problemas de Fermi. En este estudio identificaron los conceptos y procedimientos que conforman sus modelos, destacando aquellos elementos diferenciadores entre los productos de estudiantes con experiencia previa en actividades de modelización y los de estudiantes sin experiencia previa, evidenciando que los alumnos elaboran modelos más complejos conforme su experiencia modelizadora aumenta. Los resultados de este estudio conectan con el hecho de que el desarrollo de modelos matemáticos complejos y adaptables a diferentes situaciones puede ser promovido a partir de usar secuencias de problemas que permitan a los alumnos identificar los aspectos clave del modelo y conectarlos con diversas realidades o fenómenos Albarracín & Gorgorió (2018). Finalmente, Czocher (2016) empleó los problemas de Fermi con estudiantes universitarios en el campo de la ingeniería y analizó los procesos de modelización que desarrollaban. Czocher observó que los problemas de Fermi permiten a los alumnos trabajar en la identificación tanto de variables relevantes para la construcción de modelos como de restricciones presentes en los contextos problemáticos estudiados.

Efthimiou and Llewellyn (2007) caracterizaron los problemas de Fermi por la forma en que se formulan, ya que siempre se plantean como preguntas abiertas que ofrecen poca o nula información al resolutor. El aspecto clave de los problemas de Fermi desde la perspectiva de la modelización matemática es la necesidad de realizar un análisis detallado de la situación presentada en la declaración del problema, con el objetivo de descomponer el problema original en problemas más sencillos -abordados como subproblemas en el presente trabajo- para llegar a la solución de la pregunta original mediante estimaciones y conjeturas razonadas. Estas conjeturas razonadas pueden ser sustituidas por actividades de clase para profundizar en la extracción de la información y su interpretación crítica (Sriraman & Knott, 2009) o procesos de resolución de problemas vinculados a la realidad (Ärlebäck, 2009).

2.3. Conocimiento didáctico del profesor

Shulman (1986) sostiene que existe una base de conocimientos subyacentes a la comprensión del profesor para la enseñanza que son necesarios para promover la comprensión de los estudiantes. Organiza estos conocimientos en un sistema de categorías que incluye, como mínimo: el conocimiento del contenido; el conocimiento pedagógico general; el conocimiento del currículo; el conocimiento pedagógico del contenido; el conocimiento de los estudiantes y sus características; el conocimiento de los contextos educativos; y el conocimiento de los fines propósitos y valores educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos. En relación con el conocimiento del contenido, afirma que el profesor debería comprender críticamente el conjunto de ideas que va a enseñar. Sin esta comprensión de la materia el profesor no podrá transformar las ideas y conocimientos para conseguir que puedan ser entendidas por sus estudiantes. En esta transformación entra en juego el conocimiento pedagógico del contenido, entendido como la amalgama entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico general. Sin embargo, el modelo propuesto por Shulman (1986) no reconoce las interacciones entre las diferentes categorías del conocimiento. Ante esta situación, Fennema and Franke (1992) señalan que el conocimiento de la enseñanza tiene una naturaleza dinámica e interactiva. Petrou and Goulding (2011) indican que se puede establecer un paralelismo entre el conocimiento de las matemáticas propuesto por Fennema and Franke (1992)y la definición del conocimiento del contenido propuesto por Shulman (1986). Los profesores no sólo necesitan conocer los procedimientos, sino también entender los conceptos subyacentes a estos procedimientos.

A partir de las categorías propuestas por Shulman (1986), Ball, Thames, and Phelps (2008) presentan una teoría del conocimiento del profesor llamada Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), donde establecen lo que denominan conocimiento para la enseñanza de las matemáticas tomando como ejes principales el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido. Aunque el MKT ha obtenido una gran relevancia en el ámbito de la búsqueda del conocimiento del profesor de matemáticas, existen voces discordantes con su utilidad para ser utilizado en estudios de investigación, ya que fue elaborado en entornos de formación y evaluación del profesorado. Es en este sentido que aparecen alternativas como el Mathematics Teacher Specialized Knowledge (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013) o el Knowledge Quartet de Rowland (2013).

2.4. Knowledge Quartet de Rowland

Para el análisis que se presenta en este trabajo se ha elegido el Knowledge Quartet de Rowland (2013). por su diseño específico orientado a analizar la planificación y actuación del profesor en impartir sus clases.

El origen del Knowledge Quartet es un proyecto de investigación desarrollado en la Universidad de Cambridge en 2002. Empezaron a observar actuaciones de aula de una maestra sin una codificación previa, con un proceso de generación de categorías emergentes. Después los investigadores pusieron en común sus observaciones y agruparon sus anotaciones en 18 tipos de acciones que organizaron en 4 dimensiones principales que son las que dan nombre al constructo y que han sido revisadas en varias ocasiones en los últimos años (Rowland, Huckstep,& Thwaites, 2005; Rowland & Turner, 2007; Turner & Rowland, 2011). Estas dimensiones son: fundación, transformación, conexión y contingencia. Las describimos a continuación.

La primera categoría, *fundación*, consiste en el trasfondo teórico relacionado con el conocimiento de las matemáticas, así como las creencias y la comprensión que los profesores poseen o adquieren durante su formación. Se trata del conocimiento poseído independientemente de si se hace un uso intencional del mismo.

La segunda categoría, *transformación*, consiste en el conocimiento matemático en acción mostrado tanto en la planificación docente como en el acto de la propia docencia matemática. La elección y uso de ejemplos por parte del profesor, el uso de materiales didácticos y las explicaciones de ideas matemáticas son los componentes esenciales de esta categoría.

La *conexión* es la tercera categoría y se refiere a la coherencia de la planificación, a qué matemáticas se muestran en una lección o en una secuencia didáctica. Se trata de las decisiones sobre la secuenciación para conseguir que los alumnos conecten con los aprendizajes de las lecciones anteriores o las futuras. Estas decisiones del profesor muestran la capacidad de anticipar lo complejo de aprender y desglosarlo en los pasos adecuados para promover los aprendizajes de los alumnos al introducir las ideas y estrategias en un orden progresivo.

La *contingencia*, la última categoría, se centra en las respuestas del profesor a eventos de clase que no se anticiparon en la planificación de cómo se desarrollaría la actividad en el aula (Turner & Rowland, 2011).. La contingencia se refiere al conocimiento de los profesores sobre el uso de las descripciones de los estudiantes sobre sus métodos / estrategias y el razonamiento en la interacción. Las características de esta categoría son evidentes cuando el profesor se desvía de la agenda establecida o cuando el profesor responde a las respuestas de los alumnos, ya sean correctas o incorrectas.

A continuación se muestra el detalle de los códigos de análisis propuestos para cada una de estas dimensiones (Rowland, 2013), que se utilizan en el análisis desarrollado en este trabajo.

• **Fundación**

Conciencia del propósito (F1)
Adhesión al libro de texto (F2)

Concentración en los procedimientos (F3)
Identificación de errores (F4)
Exhibición de conocimientos sobre la materia (F5)
Fundamentos teóricos de la didáctica (F6)
Uso de la terminología matemática (F7)

- **Transformación**
  Elección de ejemplos (T1)
  Elección de la representación (T2)
  Uso de materiales didácticos (T3)
  Demostración docente del profesor (para explicar un procedimiento) (T4)
- **Conexión**
  Anticipación de la complejidad (C1)
  Decisiones sobre la secuenciación (C2)
  Reconocimiento de la adecuación conceptual (C3)
  Conexiones entre procedimientos y conceptos (C4)
- **Contingencia**
  Desviaciones de la agenda (CONT1)
  Responder a las ideas de los estudiantes (CONT2)
  Uso de oportunidades (CONT3)
  Intuición demostrada durante la instrucción (CONT4)
  Responder a la (in)disponibilidad de herramientas y recursos (CONT5)

3. Concreción del problema de investigación

En este trabajo se desarrolla una investigación para identificar el conocimiento necesario para un maestro de Educación Primaria para guiar con éxito una actividad de modelización matemática en una aula de Educación Primaria. Este es un terreno no explorado directamente del que no hay referencias previas en la literatura, pero que conecta con otras investigaciones como las presentadas en la sección anterior que sirven de apoyo.

Aunque este problema de investigación pueda parecer muy concreto aún es necesario tomar decisiones para limitarlo. Esto es debido al nivel de detalle que se puede llegar a conseguir en la descripción del conocimiento del profesor y a la gran variedad de actividades de modelización matemática que se pueden estudiar en la etapa de la Educación Primaria. En primer lugar se ha elegido como actividad de modelización un problema de Fermi. Estudios previos ponen de manifiesto que los alumnos del ciclo superior de Educación Primaria (10-12 años) pueden resolver determinados problemas de Fermi trabajando en grupo utilizando estrategias que desarrollan por ellos mismos y que incluyen la creación de modelos matemáticos (Albarracín, Lorente, Lopera, Pérez, & Gorgorió, 2015; Peter–Koop, 2009). Uno de los aspectos no estudiados hasta el momento, y que conecta con la formación del profesorado, es el conocimiento del maestro de primaria para poder guiar una actividad de modelización matemática. De esta forma esta investigación se fundamenta en el paradigma interpretativo ya que trata de entender los procesos educativos que desarrolla un maestro de primaria cuando guía a sus alumnos durante una actividad de modelización matemática.

En concreto, este trabajo se centra en la actuación de una maestra en una actividad que dura 3 sesiones mientras sus alumnos resuelven un problema en el que deben estimar cuántas personas caben en el patio del centro escolar, con lo que nos encontramos ante un estudio de caso, de tipo cualitativo. Para el análisis de los datos se ha elegido el marco teórico del Knowledge

Quartet de Rowland (2013), que por las características de su génesis permite caracterizar el conocimiento manifestado en una actividad de aula a partir de las grabaciones de la intervención de la maestra.

De esta forma, el principal objetivo de esta investigación es el siguiente:

- Identificar el conocimiento que pone en marcha una maestra experta en el uso de actividades matemáticas contextualizadas durante el proceso de resolución de sus alumnos de un problema que implica la construcción de un modelo matemático.

4. Metodología

En este apartado se detalla el diseño y la metodología utilizados en este estudio. La metodología que hemos seguido es de carácter cualitativo y con una finalidad interpretativa. Esta metodología tiene unas características y unos condicionantes que se adecuan a la voluntad explicativa de la investigación efectuada ya que la finalidad es caracterizar, analizar, interpretar o comprender un fenómeno; en nuestro caso, la actuación de una maestra en el marco de la resolución de un problema de Fermi.

Los datos recogidos en este trabajo son las grabaciones de audio y vídeo de las sesiones de clase de una maestra con su grupo clase trabajando un problema de Fermi, desde el planteamiento hasta la redacción de los informes de resultados. Esta recogida de datos nos permite observar las actuaciones de la maestra a cada paso, incluyendo sus intervenciones en gran o pequeño grupo para guiar el trabajo de los alumnos. Existen otras formas de acercarse al conocimiento que se permite estudiar en este trabajo, pero los datos en forma de grabación de vídeo pretenden observar la secuenciación temporal de la práctica de aula que hace la maestra con su grupo-clase desde el momento en que explica el problema a sus alumnos, cuando desarrollan el plan de acción y durante la puesta en común final. Esta grabación nos permite poder diferenciar fácilmente las fases de resolución de un problema (Polya, 1945), lo que quizás no sería tan evidente en una encuesta o una entrevista ya que en este caso habría que presuponer que la maestra comparte esta caracterización con el investigador. La grabación en vídeo también permite tener un mayor control de posibles variables como el tono de voz, gestos o la relación maestra-alumnos, que permiten interpretar mejor la actuación de la maestra.

4.1. Muestra

La recogida de datos la realizamos en una escuela de la ciudad de Barcelona. Este centro educativo es un centro concertado por el Departamento de Enseñanza de la Generalidad de Cataluña con una oferta educativa que incluye las etapas de Infantil, Primaria, Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Concretamente, la recogida de datos se centra en la actuación de una maestra que es la tutora del grupo de quinto curso de Educación Primaria de 21 alumnos de entre 10 y 11 años.

La principal razón por la que decidimos contactar con esta maestra y pedirle su colaboración en el estudio es que la maestra forma parte del Grupo de innovación matemática A+A+ de la Agrupación de maestros Rosa Sensat y ha impartido diversos talleres en Jornadas de Innovación Matemática organizadas por el grupo sobre el uso de problemas de Fermi. Por lo tanto, la maestra es una experta en trabajo de problemas de Fermi y sus alumnos ya han resuelto alguno de estos problemas, como, por ejemplo, ¿Cuántas palabras hay en la biblioteca de la escuela? o ¿Cuántos litros de agua utilizamos para ducharnos?

Así pues, tanto el grupo clase participante del estudio como la maestra ya han tenido alguna experiencia con esta tipología de problemas y, en consecuencia, con otros factores intrínsecos que comporta el uso de estos problemas en Educación Primaria, como el trabajo en grupo o plantear sus propias propuestas de resolución, la necesidad de hacer estimaciones razonadas o de obtener unos datos concretos y desarrollar los procesos necesarios para dar respuesta a un problema abierto que no tiene asociados unos métodos concretos en el contexto de la clase.

4.2. Diseño de la actividad

Como base de la actividad hemos tomado un problema de Fermi por su potencialidad para promover la modelización matemática (Ärlebäck, 2009) incluso con alumnos de Educación Primaria (Albarracín et al., 2015; Peter–Koop,. El problema utilizado pide a los alumnos una estimación de la cantidad de personas que caben en el patio del centro escolar en un contexto dado. Este problema ha sido utilizado en diversos estudios previos y las posibles estrategias de resolución que utilizan los alumnos y los modelos que se generan son conocidos (Albarracín & Gorgorió, 2014, 2018; Ferrando et al., 2017). El enunciado concreto que se pasa a los alumnos es el siguiente:

> El lunes 23 de abril se organiza el Día de Sant Jordi en el patio de la escuela. Este año habrá una novedad importante: la fiesta estará abierta a todas las familias. La directora de la escuela ha estado pensando sobre cuál es el aforo que tiene el patio de nuestro centro. Así pues, nos hace la siguiente pregunta:
>
> ¿Cuánta gente cabe en el patio?

Los alumnos trabajan a partir de una hoja de trabajo que incluye el enunciado y unas demanadas concretas para completar un informe, entre las que destaca espacio para escribir el plan de acción propuesto, los materiales a utilizar, los cálculos y la solución razonada al problema.

Los alumnos trabajan en grupos de 3 o 4 personas y la intervención didáctica se divide en tres momentos. El primero es el inicio de la actividad y la elaboración de un plan de acción, que serán en el aula. El segundo momento será en el patio si la resolución de los alumnos lo requiere y el tercero de nuevo en el aula para completar el informe y poner en común resultados y procesos.

4.3. Recogida de datos

La recogida de datos se centra en las tres sesiones de una hora en las que se desarrolla la actividad. Se graban en vídeo las intervenciones de la maestra durante las tres sesiones. La imagen de la Figura 1 muestra a la maestra participante en el estudio explicando la actividad a sus alumnos. La grabación centrada en la maestra implica que se obtiene un registro directo de todas sus intervenciones pero que no se pueden recuperar la totalidad de las interacciones entre los alumnos. Entendemos que esta limitación en el registro de datos no interfiere en los objetivos planteados en este estudio al centrarnos en la actuación de la maestra. Como complemento, se recogen todos los productos elaborados por los alumnos para generar el informe de respuesta final de la actividad.

4.4. Proceso de análisis

Para analizar los datos hemos dividido la actuación de la maestra en episodios. Entendemos que los episodios de análisis son los conjunto de acciones e interacciones que se desarrollan en un intervalo de tiempo y que desarrollan una unidad mínima con sentido propio dentro de la actividad de modelización. Tal y como otras investigaciones los caracterizan -ver, por

Figura 1: Una muestra de la grabación de la actividad

ejemplo Ferrer, Fortuny, and Morera (2014)– se utilizan los referentes adecuados al tipo de intervención y el análisis que se pretende desarrollar. En este estudio hemos utilizado las fases de resolución de un problema de Polya (1945) para caracterizar los episodios. Otra posibilidad para caracterizar los episodios habría podido ser el ciclo de modelización de Blum and Leiss (2007), pero este marco teórico está construido desde un punto de vista cognitivo y no desde la perspectiva del diseño de la actividad. Dado que cada uno de los grupos puede estar trabajando en elementos distintos del ciclo en un mismo momento, este marco teórico no nos permite separar adecuadamente los episodios. Sin embargo, la intervención de la maestra para estructurar la actividad se corresponde con las cuatro fases de resolución de un problema de Polya (1945), motivo por el que éste es el marco teórico elegido.

A continuación se muestra la caracterización de cada uno de los episodios y la fase de resolución en la que se ubican.

Episodio	Título	Fase
1	Inicio de la actividad	Comprender el problema
2	Concreción del enunciado	Comprender el problema
3	Creación de planes de acción	Elaborar un plan para resolverlo
4	Reafirmación de los planes de acción	Elaborar un plan para resolverlo
5	Área de una unidad	Ejecutar este plan
6	Unidad de medida	Ejecutar este plan
7	Elección de la mejor estrategia	Ejecutar este plan
8	Puesta en común	Mirada retrospectiva final

La estructura del análisis ha sido la misma en todos los episodios. El proceso que hemos seguido ha sido el siguiente: 1) identificación del episodio; 2) explicación de los eventos que se observan; 3) interpretación teórica a partir de las dimensiones del Knowledge Quartet de (Rowland, 2013).

Para ejemplificar el proceso de análisis hemos seleccionado el episodio 3. En este episodio la maestra, después de dejar dos minutos para que los grupos empiecen a pensar su plan de acción, pregunta a uno de los grupos sobre el plan de acción que están empezando a elaborar. El episodio se enmarca dentro de la discusión que hace la maestra en gran grupo en el trabajo de la fase de Elaboración de un plan (Polya, 1945). Lo que sigue es la transcripción[1] de una parte del episodio 3 en la que se puede observar la transcripción de todo el episodio en el que intervienen la maestra y dos alumnas de uno de los grupos de trabajo.

> (M6) Maestra: ¿Qué os hace falta saber?
>
> Alumna 1: Ah. . . nosotros hemos apuntado el tamaño del patio, lo que ocupa una persona sentada, el número exacto de alumnos y el que ocupa una persona de pie.

[1] En las transcripciones, las intervenciones de la maestra están numeradas secuencialmente durante toda la actividad, pero no hemos hecho distinción entre alumnos en las etiquetas que les damos en cada extracto de transcripción ya que nos centramos en la actuación de la maestra. De esta foram, la Alumna 1 puede ser diferente en distintos episodios.

(M7) Maestra: Vale... ¡perfecto! Entonces, ¿tenemos que ir a medir el patio?

Alumna 1: Sí, bueno, sólo que hacemos la alargada con la anchura.

Alumna 2: Ya está (refuerza el comentario de su compañera)

(M8) Maestra: ¡Eyyy! (Dirigiéndose al resto de la clase)... están diciendo cosas muy interesantes que quizás os sirven para vuestro equipo !!

Alumna 1: Sólo que hacemos la alargada y la anchura del patio, ya sabemos todo, bueno... y lo multiplicamos.

(M9) Maestra: ¿Qué obtienes?

Alumna 1: La superficie.

(M10) Maestra: Y teniendo la superficie, entonces ¿qué hay que hacer?

Alumna 1: ¿Cómo?

(M11) Maestra: O sea, tú tienes la superficie del patio, entonces qué?

Alumna 2: Entonces, podríamos calcular lo que ocupa un alumno, por ejemplo sentado, por ejemplo 25x25 y, entonces, lo podríamos meter en la superficie del patio y luego podríamos mirar una poco más o menos cuántos alumnos caben.

(M12) Maestra: Por lo tanto, deberías saber la superficie que ocupa una persona.

Alumnas 1-2: Sí.

(M13) Maestra: Me parece muy buena idea esta. Me parece muy buena idea (dirigiéndose al resto de alumnos).

En esta transcripción podemos observar que en M7 la maestra refuerza la intervención de la alumna pero a ella le interesa incidir para asegurarse si el grupo tiene un plan de acción o aún tienen que generarlo. Por ello, pregunta por si consideran necesario ir a medir el patio y provocar así la creación de un plan por parte del grupo. En M8 la maestra ve que los alumnos empiezan a crear su plan de acción para resolver el problema. Entonces aprovecha que se ha creado una oportunidad de aprendizaje para dirigirse a toda la clase para reforzar la idea de que ha dicho el grupo. El hecho de explicitar que la idea quizás les sirva a otros equipos ya da validez a la propuesta y permite que el procedimiento pueda ser universal para a todos los demás grupos. En M9 la maestra sigue ayudando al grupo a crear su propio plan de acción a la vez que aprovecha la oportunidad para trabajar contenidos matemáticos, como el hecho de que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la longitud y la anchura del mismo.

Una vez que la maestra ya ha aclarado el término área, sigue forzando a que el grupo diseñe su plan de acción (M10). En M11 la maestra da por válido el plan, que consiste en medir la anchura y el largo del patio y en determinar la superficie que ocupa un alumno. La maestra le da validez y lo repite, de forma que los grupos que aún no tengan un plan de acción esbozado o definido ya dispongan de una base sobre la que trabajar.

En este episodio la maestra ha promovido que el grupo de alumnos identifique los subproblemas clave para poder resolver el problema principal. Entendemos que espera que los alumnos al identificar los subproblemas tendrán como mínimo una intuición de cómo se relacionan los subproblemas entre ellos. Entonces, dirige la conversación hacia establecer un plan de acción vía conectar la relación entre los subproblemas. Interpretamos que ha valorado que generar un plan de acción de forma espontánea no es fácil y que era preferible que los alumnos pensaran en algún aspecto más al alcance de sus posibilidades.

En este episodio, la maestra no ha pedido a los alumnos que construyan una estrategia, les ha pedido que piensen cosas que hay que saber para resolver el problema o que piensen instrumentos necesarios para resolverlo. Esto es una intervención orientada a rebajar la demanda cognitiva a los alumnos y que ellos puedan empezar a pensar cómo resolverlo (proceso metacognitivo). La maestra promueve que los alumnos diseñen un plan de acción y discutan sobre él. La codificación de este y el resto de episodios en términos del Knowledge Quartet de (Rowland, 2013). es lo que conforma los resultados del estudio, y que detallamos en la sección siguiente.

5. Resultados por dimensiones del Knowledge Quartet

Esta sección del artículo contiene la concreción de los códigos referentes a las cuatro dimensiones del Knowledge Quartet de(Rowland, 2013).

5.1. Resultados de la dimensión Fundación

En primer lugar, hemos observado que la maestra es consciente de los propósitos de la actividad (F1) como se puede observar en el siguiente extracto del episodio 1.

> Maestra: Ah, eso no lo sabemos. Debemos decidir cómo. Mi propuesta es esta: yo ahora os repartiré una hoja en la que nos presentan este problema. El nombre del investigador es el vuestro. La fecha de hoy y lo primero que nos pide es que hagáis una hipótesis inicial. Quiere decir una hipótesis, sin contar nada, sin calcular nada, "yo creo que caben X personas", aproximadamente.¿Sí?

El segundo código, Adhesión al libro de texto (F2), no ha sido identificado en ninguna de las transcripciones. Este hecho podía ser esperable por el tipo de actividad promovida. La maestra no usa el libro de texto u otro material que guíe la actividad en ningún momento de la práctica. Esto lo interpretamos como una característica muy relevante de su actuación ya que debido a su dominio sobre la materia, no necesita utilizar este tipo de recurso. Sin embargo, opinamos que se podría ampliar el concepto a "Adhesión a materiales didácticos" para el que la maestra muestra un dominio de diferentes materiales didácticos ya sea porque los propone ella o porque conoce los que proponen los alumnos. El término "Adhesión"lo relacionamos con la necesidad que tiene el docente en ayudarse del material para desarrollar la tarea docente. En el caso que estamos estudiando, vemos que más que una adhesión, la maestra no depende del uso de ningún material sino que hará un uso si lo considera o identifica una oportunidad.

También hemos observado que se fija en los procedimientos (F3) aunque no los demande explícitamente, tal y como podemos comprobar en la siguiente transcripción.

> Maestra: Yo por eso, que aquí no está, antes que nada os pregunto y os dejo un rato para que penséis qué necesitamos saber lo que nos hace falta. ¿Vale? Repartid las hojas vosotros.

En este fragmento del episodio 1 interpretamos que la maestra conoce las fases de resolución de problemas y sabe que antes de pensar en una estrategia o en un plan de acción es necesario saber qué tipo de datos y los materiales van a utilizarse durante la actividad. Con esta intervención la maestra promueve que los alumnos identifiquen subproblemas claves derivados del enunciado principal. Su propósito es anticiparse ya que valora que los alumnos tendrán dificultades en generar un plan de acción completo. Decide que es mejor ajustar la demanda cognitiva a las posibilidades de los alumnos.

El código F4 referido a la Identificación de errores ha sido observado en el episodio 6, en el que los grupos de alumnos bajan al patio y la maestra los interroga minuciosamente pidiendo que definan su plan de acción con precisión.

Alumna: Bueno, nosotros hemos pensado en dar un paso, y con un metro, medir a ver si un paso realmente es un metro para hacerlo un poco como más aproximado.

(M18) Maestra: Por lo tanto, será la misma persona que hará el recorrido del patio.

Alumna: Sí.

(M19) Maestra: Pues, ¡venga vamos!

La maestra evalúa la viabilidad y eficacia de cada propuesta. En este caso, la maestra considera que la estrategia que seguirá el grupo es correcta. Ellos proponen medir la longitud de un paso de un miembro del grupo, mirarán si equivale a un metro y empezarán a contar pasos. A continuación, relacionarán los pasos contados con metros y así obtendrán una medida aproximada. Pero la maestra no está segura de que el grupo utilice consistentemente la misma unidad de medida, es decir, la misma longitud para cada paso. Entonces se anticipa al error y aclara "Por lo tanto, será la misma persona que hará el recorrido del patio". La maestra tiene experiencia en este tipo de situaciones y demuestra conocer diferentes estrategias para medir, los errores que se derivan y lo alumnos suelen hacer. Por ello, los identifica y se anticipa.

Lo que sigue es un extracto de la transcripción del episodio 7, en el que la maestra demuestra tener altos conocimientos sobre la materia.

(M24) Maestra: Vale, pero igualmente lo medís todo con cintas métricas. . . lo probaremos. . . ahora cuando las traigan, espera a que bajen.

Alumna 4: O la mitad del campo y lo multiplicamos por dos.

(M25) Maestra: ¡¡También!! ¡Eh! ¡Sí! Volved a repetir esta opción que es más válida.

Alumna 4: O la mitad del campo y lo multiplicamos por dos.

(M26) Maestra: Si medís medio campo ya basta. La otra opción. . . ah, esta no os la puedo decir que es muy fácil.

A1-A2-A3-A4: ¿¿¿¿Cuál????

Podemos observar en esta intervención, que la maestra hace un uso intencional de sus conocimientos sobre los diferentes tipos de resolución que puede tener el problema. En primer lugar a M25 dice "¡¡También!!"y da a entender a los alumnos que hay más de una estrategia posible. A continuación, la refuerza ante los demás y le da validez "volved a repetir esta opción que es más válida". A nivel de gestión consigue que varios grupos escuchen los procedimientos y las estrategias de los demás y cuando dice "La otra opción. . . ah, esta no te la puedo decir que es muy fácil"finge que tiene una solución más sencilla y eficaz. Con esto provoca que los alumnos escuchen otras propuestas y sigan pensando alternativas para conseguir aquella opción más fácil que no han conseguido elaborar.

El código Fundamentos teóricos de la didáctica (F6) es difícil de observar, porque la maestra no justifica ante la cámara sus decisiones. En todo momento observamos que muestra que tiene claras las fases de resolución de problemas de (Polya, 2945) que las conoce y las identifica a lo largo de toda la práctica. También hemos observado que durante toda la actividad utiliza el *Revoicing* (Boukafri, Civil, & Planas, 2018) para reestructurar el conocimiento explicitado al repetir las afirmaciones de los alumnos refraseándolas de forma correcta. El siguiente diálogo propio del episodio 3 es una muestra:

(M11) Maestra: O sea, tú tienes la superficie del patio, ¿entonces qué?

Alumna 2: Entonces, podríamos calcular lo que ocupa un alumno, por ejemplo sentado, por ejemplo 25x25 y, entonces, lo podríamos meter en la superficie del patio y luego podríamos mirar un poco más o menos cuántos alumnos caben.

(M12) Maestra: Por lo tanto, deberías saber la superficie que ocupa una persona.

Alumnas 1-2: Sí.

El último código de esta primera dimensión nos habla sobre el Uso de la terminología matemática (F7). La maestra sabe cuáles son los términos matemáticos adecuados para este problema y mira que sean adecuados al nivel de sus alumnos. Usa correctamente los términos y provoca que los alumnos también lo hagan.

5.2. Resultados de la dimensión Transformación

El primer código de la dimensión Transformación es Elección de ejemplos (T1) y lo encontramos en el episodio 11 . En su primera intervención (M27), la maestra elige algunas de las estrategias que ha visto en la parte práctica que le han parecido más interesantes y las resume ante el grupo-clase.

(M27) Maestra: Entonces, muy bien. La gran mayoría estuvimos calculando la superficie. Hay quien lo hizo con palos de metro, hay quien lo hizo con pasos y luego se apuntó el tamaño de su paso, ¿no? Y luego, finalmente, como nos faltaba un trocito, pues con palmos.

El código de Elección de la representación (T2) no ha sido observado explícitamente pero entendemos que se debe a que la forma que tiene la maestra de guiar la actividad es esencialmente verbal. El código de utilización de materiales didácticos (T3) se presenta durante la puesta en práctica del plan de acción, en la que muchos grupos deciden medir el patio utilizando diferentes materiales. La maestra pone a disposición de los grupos diferentes materiales (postes de metro o cintas métricas) que tienen en la escuela con el objetivo de que los grupos evalúen si son útiles para ellos o no. Ella sólo se fija en que la utilización del material sea la correcta.

Un ejemplo del código Demostración docente del profesor (T4) lo encontramos en el episodio 9 cuando la maestra ayuda a un grupo para replantearse un procedimiento. Según podemos ver en la siguiente transcripción, la maestra se ayuda de una hoja y un lápiz para representar gráficamente la estrategia de resolución que tiene el grupo y que aún no han madurado lo suficiente. El objetivo de su intervención no es el de explicar un nuevo procedimiento, sino mostrar las deficiencias del procedimiento plantado por los alumnos y para forzar una reelaboración del mismo.

(M38) Maestra: A ver, un momento. Quiero que vea algo. . . A ver. . . (la maestra coge una hoja y un lápiz). Ustedes han medido tres personas así. . . y tres personas así. . . y que eso ¿cuánto medía?

Alumna 1: Un metro veinte y cuatro.

(M39) Maestra: ¿Y esto?

Alumnas 1-2: un metro diez.

(M40) Maestra: Muy bien. En esta superficie, ¿cuántas personas caben? (señala todo el rectángulo)

Alumno: 4 más (señala la parte que no hay redondeles)

(M41) Maestra: Por lo tanto, ¿cuántas personas caben en total?

Alumnas 1-2: 9

(M42) Maestra: ¿9 personas en una superficie de cuánto? ¿Qué hacer con esto? (Señala 1,10m y 1,24m)

6. Resultados de la dimensión Conexión

La tercera dimensión Conexión nos sirve para mostrar que la maestra conoce la complejidad que tiene el problema para sus alumnos y que conoce cómo anticipar esta complejidad (C1). En la intervención (M16) podemos ver como la maestra anticipa durante la fase de creación de planes de resolución el hecho de que como todas las personas son diferentes y, por lo tanto, ocupan áreas diferentes en el patio. Este hecho proviene de la variabilidad presente en la situación real a estudiar y representa una dificultad para los alumnos que no conocen un procedimiento concreto para incorporar esta variabilidad a sus procedimientos.

> (M16) Maestra: Vale! Tú piensas que tienes que calcular las personas que caben de pie y las personas que caben sentadas, ¿no? Y que representarán superficies diferentes, ¿no? Es lo mismo si…¿yo ocupo el mismo si yo estoy de pie o estoy sentada? (Se dirige a toda la clase)
>
> Alumnos 1-2-3: ¡¡¡No!!!

A lo largo de la práctica, la maestra tiene que ir tomando diferentes decisiones sobre cómo secuencia la actividad (C2) ya que al ser una actividad abierta hay muchos factores que intervienen y pueden hacer variar el rumbo. Durante el episodio 3, la maestra incide de dos formas distintas. Por un lado aprovecha una idea de un grupo de alumnos y la hace pública (M8) y, por el otro, promueve que los alumnos hagan algo concreto en el patio, con lo que realmente está secuenciando la actividad adaptándose a lo que quieren hacer los alumnos y seguramente ella tenía anticipado. Los códigos de Reconocimiento de la adecuación conceptual (C3) y de Conexiones entre procedimientos y conceptos (C4) son códigos que se pueden observar en muchas intervenciones de la maestra. Son códigos intrínsecos a la práctica de guía de una actividad matemática como la que plantea. Un ejemplo concreto es el siguiente

> Alumna 1: Sólo que hagamos la longitud y la anchura del patio, ya sabemos todo, bueno…y lo multiplicamos.
>
> (M9) Maestra: ¿Qué obtienes?
>
> Alumna 1: La superficie.

6.1. Resultados de la dimensión Contingencia

Para la dimensión Contingencia hemos intentado buscar la capacidad de la maestra de dar respuestas coherentes y razonadas en eventos no anticipados ni planificados. Hemos decidido agrupar el código Desviaciones de la agenda (CONT1) con el código Responder a las ideas de los estudiantes (CONT 2) ya que en esta actividad se activan al mismo tiempo. Estos códigos tienen mucha importancia en este tipo de gestión del aula ya que la maestra tiene que ir dando respuestas a las diferentes aportaciones o ideas de los alumnos. El hecho de salirse de lo planificado no incomoda a la maestra ya que tiene un conocimiento muy amplio de las situaciones que pueden aparecer. Como podemos ver en el siguiente extracto durante el episodio 4, ante la pregunta de un alumno de otro grupo distinto al que está explicando su plan de acción, la maestra prefiere asegurar el concepto de superficie de un rectángulo (la pista) y no desviarse de lo planificado. Sin embargo, la maestra no cierra la puerta a la nueva aportación del alumno “si tenemos más tiempo podemos ir a otras zonas”(M14),pero prefiere, inicialmente, que los alumnos no cambien las condiciones del problema y cierren un plan de acción efectivo.

> Alumno 3: Pero, ¿las gradas también cuentan?

(M14) Maestra: ¿Las gradas? Bueno, pero podemos empezar primero con la pista y, una vez tengamos la pista calculada, podemos ver las gradas si nos da tiempo. Pero, piensa que aquí nos piden la pista. Nos piden el aforo en el patio, por lo tanto, podemos ir al patio, si tenemos más tiempo podemos ir a otras zonas. Una de las cosas que hemos estado trabajando últimamente que es el tema de las superficies, aquel grupo de allí nos ha dado una idea muy interesante.

Dado que existen diversas formas de resolver este problema, las oportunidades de aprendizaje que surgen y deben ser gestionadas son muchas. Un ejemplo lo encontramos en el episodio 7 donde la maestra aprovecha que los alumnos quieren medir un lado para enseñar que quizás no han escogido el mejor material para medir "pero estarás mucho tiempo midiendo con cintas métricas, ¿no?". Con esta intervención hace que el grupo piense en otra alternativa más eficiente.

Entendemos que en toda tarea docente, pero especialmente en aulas de Educación Primaria, un profesor debe intentar saber leer lo que los alumnos quieren decir donde no siempre preguntan lo que realmente quieren preguntar o lo que realmente necesitan. Un ejemplo del código Intuición demostrada durante la instrucción (CON4) se manifiesta también en el primer extracto de la dimensión Conexión, en el que una alumna intenta explicar "cuánto ocupa una persona sentada y una persona de pie", sin utilizar el concepto de área. La maestra intuye hacia dónde quiere ir (M16) y rehace el discurso de la alumna ante toda la clase para explicar el concepto de la diferencia de superficies.

(M15) Maestra: ¿Alguien ha escrito más ideas?

Alumna 1: Yo creo que hasta donde estarán las personas sentadas porque como la medida no es la misma... pues... pues, si aquí se acaban las personas sentadas y aquí empiezan las derechas, sino lo sabemos, podemos contar más sentadas.

(M16) Maestra: ¿Vale! Tú piensas que tienes que calcular las personas que caben de pie y las personas que caben sentadas, no? Y que representarán superficies diferentes, no? Es lo mismo si ... yo ocupo el mismo si yo estoy de pie o estoy sentada? (Se dirige a toda la clase)

Alumnos 1-2-3: ¡¡¡Noo!!!

(M17) Maestra: ¡¡Vale!!

El último código Responder a la (in)disponibilidad de herramientas y recursos (CONT5) nos permite ver si la maestra controla los recursos que pueden utilizar sus alumnos. La maestra siempre pregunta a los grupos cómo y con qué harían una medida. Los alumnos conocen los diferentes materiales que la escuela tiene ya que han trabajado con ellos antes y son ellos los que comprueban si les sirve o no. La maestra sólo hace de acompañante en este proceso. También es capaz de resumir todos los recursos que han utilizado los diferentes grupos.

7. Síntesis de resultados

En el apartado de resultados anterior hemos podido observar el conocimiento de la maestra experta durante una práctica de un problema de Fermi contextualizado según las cuatro dimensiones del Knowledge Quartet de (Rowland, 2013). En esta sección exponemos los tres aspectos clave que conectan con las investigaciones previas y que nos permiten crear la síntesis de resultados de este estudio.

El primer resultado es la gestión que hace la maestra en el momento de generación del plan de acción por parte de los alumnos. La maestra utiliza diferentes recursos didácticos para provocar que los alumnos generen un plan de acción para resolver el problema. El primer aspecto relevante es la parte de motivación que provoca en los alumnos los problemas contextualizados y reales. Hemos visto que gracias a la autenticidad del enunciado del problema, los alumnos han podido conectar sus conocimientos provenientes de la experiencia para proponer el uso de recursos concretos. Este hecho se hace evidente en las discusiones sobre la forma de medir el área del patio y el espacio que ocupa una persona, sea de pie o sentada. Entendemos pues que el contexto auténtico del problema les permite movilizar conocimientos propios y les permite conseguir unas respuestas más concretas, cercanas y justificadas.

Uno de los episodios más ricos desde el punto de vista del conocimiento manifestado por la maestra es la discusión de las propuestas de resolución del problema. Este episodio pertenece a la segunda de las fases de resolución de un problema de Polya (1945), que siguen siendo una buena forma de identificar las diferentes etapas de la resolución aunque la actividad esté contextualizada en la realidad y se trate de una actividad de modelización. Durante la discusión en gran grupo que promueve la maestra, en los primeros minutos permite que cada grupo exponga su plan de acción ante el resto de grupos y empiecen a refinarlo, justo antes de ir al patio a ejecutarlo. En este punto vemos la importancia que sea un problema de Fermi (Ärlebäck, 2009) un contexto realista y un planteamiento abierto que no explícitamente ligado a ningún método concreto, ya que de esta forma cada grupo, independientemente de su nivel matemático, puede pensar y diseñar su propio plan de acción, más o menos eficaz. El hecho más relevante de la intervención de la maestra en este episodio es la forma en la que acompaña a los alumnos desde sus planes de acción incompletos (no les ha pedido que los elaboren de forma completa) hasta que consigue que se conecten todos los conceptos y procedimientos necesarios para tener una primera versión del plan que funcione sobre el papel. Destacamos el hecho de que la maestra, al plantear la actividad pretende que los alumnos desarrollen sus propios planes de acción, pero no lo pide explícitamente. Lo que hace es rebajar la carga cognitiva de la tarea y les pide que identifiquen aspectos clave en la resolución y las herramientas necesarias para su ejecución. De esta forma, escuchando las discusiones de los alumnos en pequeño grupo se pueden identificar aquellos grupos que están identificando aspectos relevantes y les ayuda a construir el plan de acción desde este punto.

El segundo resultado relevante del trabajo, ligado con el conocimiento del maestro, es que una vez hecha la discusión de los planes de acción de los grupos en el aula, en la parte donde se lleva a la práctica el plan de acción, es ver cuál es la actuación de la maestra en la fase de ejecución. Hemos observado que la condición de experta de la maestra en este tipo de actividades le permite gestionar el plan de acción de cada grupo de la manera más adecuada posible. Las dimensiones del Knowledge Quartet de (Rowland, 2013) nos han permitido elaborar una interpretación de la planificación y actuación de la maestra. La secuenciación que utiliza la maestra en cada grupo de 1) preguntar de nuevo sobre el plan de acción propuesto; 2) intentar provocar un cambio para tratar de mejorar o enriquecer el plan de acción ya sobre el terreno; 3) utilizar y hacer utilizar los aspectos y terminologías clave; y, 4) hacer que los grupos comprueben la eficacia del nuevo plan de acción. Esta secuencia de acciones de la maestra enlaza con la complejidad de la resolución de un problema de Fermi (Ärlebäck, 2009). De esta forma, la maestra incorpora mecanismos para ayudar a los alumnos en aquellos momentos en los que pueden tener dificultades pero también incluye elementos motivadores para no permitir que sigan opciones de trabajo que simplifiquen la complejidad de la actividad hasta desnaturalizarla. Entendemos que es por este motivo promueve que los alumnos reconsideren la propuesta de resolución cuando están sobre el terreno.

El último resultado del trabajo se encuentra en la forma en la que la maestra activa cognitivamente a sus alumnos. Los problemas de Fermi permiten promover estas activaciones ya que se parte de las ideas de los alumnos de cara a generar otras nuevas y estimular una reflexión posterior, a fin de validar el nuevo modelo generado. Esta activación también se observa cuando la maestra promueve que los alumnos desarrollen diferentes soluciones o estrategias. Aquí vemos la importancia que demuestra el conocimiento de la maestra sobre diversos métodos de resolución para el problema con lo que puede provocar que se consideren nuevos enfoques. El mejor ejemplo sucede en el episodio 7, cuando los alumnos ya tienen un plan de acción y la maestra los incita a generar otro (M26). Otro episodio relevante se da durante el episodio 8. Es como si toda la actividad estuviera dirigida a este momento. La maestra pregunta al grupo sobre su plan de acción y viendo que no lo tienen del todo claro, empieza a reconceptualizar todo lo que el grupo ha hecho o han entendido durante la parte práctica. Conoce lo que el grupo le quiere explicar y aprovecha ese conocimiento básico desarrollado durante la actividad para ayudar a los alumnos a construir conocimiento formal.

8. Conclusiones

El estudio presentado aprovecha su naturaleza cualitativa y exploratoria y nos ha permitido identificar algunos conocimientos clave para guiar una actividad como la estudiada. Entendemos que el trabajo abre una vía de investigación sobre el conocimiento del profesor sobre la guía de actividades de modelización. El trabajo presentado muestra que existe una especificidad propia de la gestión de actividades de modelización matemática para la etapa de Educación Primaria y que el conocimiento didáctico y del contenido de profesor es un aspecto clave. Dado el perfil de los maestros de Educación Primaria en España, en el que no se especializan en la didáctica de las Matemáticas, este es un aspecto que debe ser considerado para enmarcar futuros desarrollos. Para seguir este trabajo, sería necesario ampliar este estudio analizando la actividad docente de otros profesores, utilizando otros tipos de actividades de modelización, tanto otros problemas de Fermi como otras actividades de modelización con otras características, y ampliando el rango de edades de los alumnos participantes, en especial aquellos de los primeros ciclos de Educación Primaria Stohlmann & Albarracín,(2016).

El marco teórico del Knowledge Quartet de Rowland (2013) se ha mostrado como una potente herramienta para caracterizar la actividad del profesor en procesos de modelización matemática en acto, aunque hemos identificado algunos aspectos que podrían reconsiderarse. El caso más claro es la ampliación del código Adhesión al libro de texto (F2) para dar cobijo a las prácticas habituales que son poco dependientes del libro de texto. Por su naturaleza, las actividades de modelización conectan matemáticas y realidad, con lo que es frecuente que las actividades incluyan instrumentos de medida o materiales manipulativos para representar conceptos complejos Diago, Ortega, Puig & Ferrando (2016). De cara a la extracción de resultados, entendemos que la dimensión de contingencia es de especial relevancia para este trabajo, dada la naturaleza de las actividades de modelización como actividades abiertas, es decir, sin un procedimiento prefijado que se pueda anticipar de forma precisa.

Los resultados del trabajo presentado deben poder transferirse a la formación de maestros de Educación Primaria, para la que observamos que es indispensable que los maestros conozcan con precisión las diferentes formas de abordar el problema, el uso de distintos materiales para recoger, analizar y representar datos y medidas y una gestión de aula en la que se estimula constantemente la generación de nuevas ideas y la conexión con conocimientos previos como forma de promover la modelización matemática.

Referencias

Albarracín, L. (2017).
Los problemas de fermi como actividades para introducir la modelización: qué sabemos y qué más deberíamos saber.
Modelling in Science Education and Learning, 10(2), 117–136.

Albarracín, L., Gorgorió, N. (2014).
Devising a plan to solve fermi problems involving large numbers.
Educational Studies in Mathematics, 86(1), 79–96.

Albarracín, L., Gorgorió, N. (2015).
A brief guide to modelling in secondary school: estimating big numbers.
Teaching Mathematics and its Applications, 34(4), 223–228.

Albarracín, L., Gorgorió, N. (2018).
Students estimating large quantities: From simple strategies to the population density model.
EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14, 10.

Albarracín, L., Lorente, C., Lopera, A., Pérez, H., Gorgorió, N. (2015).
Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de educación primaria.
Epsilon, 32(89), 19–33.

Ärlebäck, J.B. (2009).
On the use of realistic fermi problems for introducing mathematical modelling in school.
The Mathematics Enthusiast, 6(3), 331–364.

Ärlebäck, J.B. (2011).
Exploring the solving process of groups solving realistic fermi problem from the perspective of the anthropological theory of didactics.
In Proceedings of the seventh congress of the european society for research in mathematics education (pp. 1010–1019).

Ball, D., Thames, M.H., Phelps, G. (2008).
Content knowledge for teaching: What makes it special?
Journal of teacher education, 59(5), 389–407.

Blum, W. (2002).
Icmi study 14: Applications and modelling in mathematics education–discussion document.
Educational studies in mathematics, 51(1-2), 149–171.

Blum, W., Leiss, D. (2007).
How do students and teachers deal with modelling problems.
In Mathematical modelling (ictma 12): Education, engineering and economics (pp. 222–231).

Boukafri, K., Civil, M., Planas, N. (2018).
A teacher's use of revoicing in mathematical discussions.
In Language and communication in mathematics education (pp. 157–169). Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M. (2013).
Mathematics teacher specialized knowledge.
Proceedings of the 8th CERME. Turkey.

Czocher, J.A. (2016).
Introducing modeling transition diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking.
Mathematical Thinking and Learning, 18(2), 77–106.

Diago, P., Ortega, M., Puig, L., Ferrando, I. (2016).
Diseño e implementación de tareas de modelización con ipad ®'s: un enfoque dual.
Modelling in Science Education and Learning, 9(1), 35–56.

Doerr, H.M., English, L.D. (2003).
A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data.
Journal for research in mathematics education, 110–136.

Efthimiou, C.J., Llewellyn, R.A. (2007).
Cinema, fermi problems and general education.
Physics education, 42(3), 253.

Fennema, E., Franke, M.L. (1992).
Teachers' knowledge and its impact.
Macmillan Publishing Co, Inc.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L.M., Gorgorió, N. (2017).
Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de fermi.
Boletim de Educação Matemática, 31(57), 220–242.

Ferrer, M., Fortuny, J.M., Morera, L. (2014).
Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático.
Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 32(3), 385–405.

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L.M., Albarracín, L., Gorgorió, N. (2017).
Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve fermi problems.
In Mathematical Modelling and Applications (pp. 265–275). Springer.

Lesh, R., Harel, G. (2003).
Problem solving, modeling, and local conceptual development.
Mathematical thinking and learning, 5(2-3), 157–189.

Peter-Koop, A. (2009).
Teaching and understanding mathematical modelling through fermi-problems.
In Tasks in primary mathematics teacher education (pp. 131–146). Springer.

Petrou, M., Goulding, M. (2011).
Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching.
In Mathematical knowledge in teaching (pp. 9–25). Springer.

Pólya, G. (1945).
How to solve it.
Princeton University Press, Princeton.

Robinson, A. (2008).
Dont just stand there – teach fermi problems!
Physics Education, 43(1), 83.

Rowland, T. (2013).
The knowledge quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge.
Sisyphus-Journal of Education, 1(3),15–43.

Rowland, T., Huckstep, P., Thwaites, A. (2005).
Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of naomi.
Journal of Mathematics Teacher Education, 8(3), 255–281.

Rowland, T., Turner, F. (2007).
Developing and using the "knowledge quartet": A framework for the observation of mathematics teaching.
The Mathematics Educator, 10(1), 107–124.

Schoenfeld, A.H. (1985).
Mathematical problem solving.
Academic Press, Inc.

Shulman, L.S. (1986).
Those who understand: Knowledge growth in teaching.
Educational researcher, 15(2), 4–14.

Sriraman, B., Knott, L. (2009).
The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness.
Interchange, 40(2), 205–223.

Stohlmann, M.S., Albarracín, L. (2016).
What is known about elementary grades mathematical modelling.
Education Research International, 2016.

Turner, F., Rowland, T. (2011).
The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge.
In Mathematical knowledge in teaching (pp. 195–212). Springer.

Vorhölter, K., Kaiser, G., Borromeo Ferri, R. (2014).
Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approac for transforming mathematics education.
In Transforming mathematics instruction (pp. 21–36). Springer.

Weinstein, L., Adam, J.A. (2009).
Guesstimation: Solving the world's problems on the back of a cocktail napkin.
Princeton University Press.

Winter, H. (1994).
Modelle als konstrukte zwischen lebensweltlichen situationen und arithmetischen begriffen.
Grundschule, 26(3), 10–13.